مجلّة جامعة عدن للعلوم الانسانيّة والاجتماعية
EJUA-HS Vol. 4 No. 1 (2023)
https://doi.org/10.47372/ejua-hs.2023.1.241
ISSN: 2708-6275

مقالة بحثية

بناء مسائل رياضية شكلية ذات صورة نونية باستخدام الاستقراء (كم عدد المثلثات في المثلث؟)

سالم أحمد عبدالله عبدالكبير *

قسم الرياضيات، كلية التربية - عدن، جامعة عدن، اليمن

* الباحث الممثل: سالم أحمد عبدالله عبدالكبير؛ البريد الالكتروني: salemabdalkabeer16@gmail.com؛ هاتف: 777084989

استلم في: 30 فبراير 2023 / قبل في: 19 مارس 2023 / نشر في: 31 مارس 2023

المُلخّص

هدف البحث بناء مسائل رياضية شكلية بصورتها النونية حيث كانت التعليمات اللفظية تبدأ بالسؤال كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟ حيث هذا الشكل هو المثلث لجميع المسائل, استخدم الباحث المنهج الاستقرائي لإيجاد العلاقات العامة لحل أسئلة البحث، كما استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة صحة النتائج. وتوصل الباحث إلى النتائج التالية:

1- بناء (7) مسائل رياضية شكلية مجموع مثلثاتها تعطى بصورة نونية من الدرجة الأولى.
2- بناء (8) مسائل رياضية شكلية مجموع مثلثاتها تعطى بصورة نونية من الدرجة الثانية.
3- بناء (25) مسألة رياضية شكلية مجموع مثلثاتها تعطى بصورة نونية من الدرجة الثالثة.
4- بناء (3) مسائل رياضية شكلية مجموع مثلثاتها تعطى بصورة نونية من الدرجة الثالثة (فردي و زوجي).
5- بناء (18) مسألة رياضية شكلية مجموع مثلثاتها تعطى بصورة نونية ذات متغيرين.
6- بناء (25) مسألة رياضية شكلية متناظرة مجموع مثلثاتها تعطى بصورة نونية.

الكلمات المفتاحية: مسائل رياضية، صيغة نونية، كم عدد المثلثات؟

مقدمة:

شهدت الحياة تطوراً علمياً وتكنولوجياً واسعاً في جميع فروع المعرفة في عصرنا الحاضر، وقد ساهمت الرياضيات مساهمة فعالة في هذا التطور العلمي والتكنولوجي، فالرياضيات كأحد فروع المعرفة تعتبر لغة رمزية عالمية وشاملة احتلت مكانة مرموقة بين صفوف المعرفة العلمية.

فمع تعاظم الدور الحضاري والمنفعي الذي تقوم به الرياضيات في مجالات المعرفة المعاصرة، وأوجه التقدم في العلم والتكنولوجيا يصبح من الأهمية أن نعد طلابنا إعداداً قوياً وذكياً في الرياضيات من حيث تكوين الحس الرياضي و إدراك مفاهيم الرياضيات و إتقان مهاراتها في سياقات مجتمعية و في مواقف واقعية و أطر قيمية , و على مر العصور كان السعي نحو تطوير تعليم و تعلم الرياضيات من خلال نظريات متجددة (عبيد, 2004, ص13)

و يعرف أبو زينة الرياضيات على أنه "علم تجريدي من خلق و إبداع العقل البشري، وتهتم من ضمن ما تهتم به بالأفكار و الطرائق و أنماط التفكير". وكذلك تهتم المناهج الحديثة للرياضيات ليس فقط بالمعرفة في مجال المحتوى، بل بتنمية التفكير لدى الطلبة إذ تقع مسؤولية تنمية عادات التفكير الفعال وتحديداً حل المسائل على مناهج الرياضيات بشكلٍ خاص ويعد التفكير أحد العمليات العقلية المعرفية العليا الكامنة وراء تطور الحياة الإنسانية، وسيطرة الإنسان على كافة الكائنات الحية، واكتشاف الحلول الفعالة التي يتغلب بها على ما يواجهه من مشكلات، بل إن معظم الانجازات العلمية التي حققتها البشرية مبنية على عملية التفكير، هذا بالإضافة إلى أن الأسلوب الذي يفكر به الفرد يعد قوة كامنة على كافة تفاعلاته (أبوزينة, 2011, ص48)

و يعد حل المسائل الرياضية من العوامل التي يجب تنميتها لدى الطلبة في المراحل الأولى للتعلم لأنها أحد الجوانب المعرفية التي يتم تشكيلها وبنائها لدى المتعلم أثناء الموقف التعليمي، عن طريق دمج المسائل الرياضية مع المنهج التعليمي الشامل للرياضيات وليس كمجموعة من المهارات المستقلة التي تدرس عقب نهاية كل وحدة دراسية (Agostino,2008,p 206). ولكي ينمى حل المسائل بشكل جيد يجب التعرف إلى تفكير الطلبة أثناء حل المسألة ، حتى يمكن التدخل ومساعدتهم وتوجيههم في الوقت المناسب، لكي يصل المتعلم إلى حلول مختلفة للمسألة من خلال تطبيق خطوات حل المسألة (الثبيتي, 2011, ص6).

إن القدرة على حل المسائل الناتج الأكثر أهمية للتعلم, حيث أن الفرد القادر على حل المسائل يمكنه أن يتعلم بنفسه في استقلالية تامة, إذ يهدف تدريس حل المسائل إلى تنمية قدرات المتعلم على حل أنواع عديدة من المسائل غير المألوفة لديه, لهذا يحتاج المتعلم إلى قدر معين من المعلومات و المهارات, فالقدرة على استخدام المعلومات و الحقائق هي جزء ضروري في تنمية حل المسائل.(بدوي, 2003, ص 191)

إن اعتبار سؤال ما مشكلة أو مسألة يعتمد على المعرفة التي يمتلكها الفرد. فقد يجيب أحد الأشخاص على سؤال ما بطريقة روتينية مألوفة، بينما يحتاج آخر إلى التفكير إذا كانت معرفته لا تقدم له طريقة للإجابة عن ذلك السؤال. وما هو مسألة عند فرد معين اليوم قد لا يكون كذلك في الغد. لذلك تعددت تعريفات المسألة الرياضية عند التربويين.

فيرى (سلامة, 2003, ص82) المسألة الرياضية " هي موقف جديد ومميز يواجه الطالب، ولا يكون لهذا الموقف حلاً جاهزاً عنده".

وقد ظهرت الكثير من الاستراتيجيات في حل المسألة الرياضية, يحددها (الصادق, 2001, ص 245) بالعمل للخلف و إيجاد نموذج للحل, و تبني وجهة نظر مختلفة, و إيجاد حل لمسألة أبسط, و استخدام الرسوم لتمثيل المسألة بصرياً, و استخدام معلومات زائدة, و استخدام المطلوب من المسألة على مراحل (تجزئة), و ترتيب البيانات في المسألة, و استخدام النماذج المحسوسة, و التمثيل في حل المسألة, التخمين والاختيار, و الجداول والرسوم البيانية, و التجريب, و التقريب, و تحديد صفات الأشياء.

و يذكر (كرانتس, 2014, ص2) أنه من بين الأساليب المستخدمة في حل المسائل "الاستقراء، التناقض، الاستنفاذ، التقسيم، القياس، التعميم، التخصيص، إعادة الصياغة، التفريق، إعادة التركيب، التحليل المساعد، العد، طرائق الرسم، الرسومات التخطيطية، وبالطبع فإن هذه القائمة ليست كاملة، كما أنه من الممكن استخدام أفكار من عدد من هذه الطرق لحلّ إحدى المسائل".

والاستقراء هو الوصول إلى الأحكام العامة أو النتائج اعتماداً على حالات خاصة أو جزئيات من الحالة العامة. أي أن الجزئيات أو الحالات الخاصة هي أمثلة من الحالة العامة أو النتيجة التي تم استقراؤها.

و من خلال اطلاع الباحث على عدد من المراجع في الأدب التربوي, و بعض مواقع النت فقد وجد الباحث إجابة جزئية عن بعض أسئلة البحث تعطى على صورة ألغاز مثلاً كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل (الشكل محدد بـ($n=2$) أو($n=3$)), وهنا يحاول الباحث الإجابة عن أسئلة البحث باستخدام الاستقراء الرياضي و الوصول إلى الصيغة النونية لكل شكل.

أسئلة البحث:

في ضوء ما سبق تتحدد أسئلة البحث في السؤال الرئيس الآتي: ما هي المسائل الرياضية الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية باستخدام الاستقراء ؟

و في ضوء سؤال البحث الرئيس يمكن صياغة الأسئلة الفرعية الآتية:

1- ما هي المسائل الرياضية الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية من الدرجة الأولى؟
2- ما هي المسائل الرياضية الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية من الدرجة الثانية؟
3- ما هي المسائل الرياضية الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية من الدرجة الثالثة؟
4- ما هي المسائل الرياضية الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية من الدرجة الثالثة (فردي و زوجي)؟
5- ما هي المسائل الرياضية الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية ذات متغيرين؟
6- ما هي المسائل الرياضية الشكلية المتناظرة والتي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية؟

منهجية البحث:

استخدم الباحث المنهج الاستقرائي لبناء المسائل الشكلية و طريقة الاستقراء لإيجاد الصيغة النونية التي تمثل حل لسؤال "كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟", و للتأكد من صحة هذه الصيغة تم برهنتها باستخدام الاستقراء الرياضي.

محددات البحث:

- جميع المسائل الشكلية تبدأ بالسؤال "كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟"
- الإطار العام لكل المسائل الشكلية هو المثلث.
- الأشكال التي تعطى بصيغة نونية و استبعاد الاشكال غير المنتظمة التي لا يمكن إيجاد صيغة نونية لها و تمثل حالات خاصة.
- جميع أشكال المسائل الشكلية مرسومة عندما (n=2) أو (n=3) حسب الحاجة لتوضيح الشكل.

أهمية البحث:

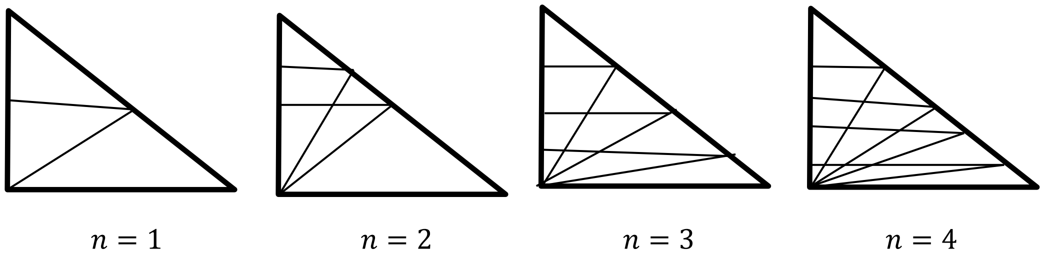
تكمن أهمية البحث في الاتي:

- حصر المسائل الشكلية تبدأ بالسؤال "كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟"
- مساعدة المعلمين في التعرف على تشكيلة واسعة من المسائل الشكلية التي يمكن استخدامها أثناء عملية التدريس.
- قد يفيد هذا البحث واضعي المناهج الدراسية في وضع هذه المسائل الشكلية نصب أعينهم عند بناء المناهج الدراسية.
- يمكن استخدام المسائل الشكلية الواردة في البحث في جميع المراحل الدراسية, فتستخدم في المراحل الدراسية الدنيا عندما n يساوي واحد أو اثنان, و تستخدم للمراحل الدراسية العليا عندما n تزيد على ذلك.

خطوات عمل الباحث:

الخطوة الأولى: و تتمثل بطرح السؤال "كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟", حيث الإطار العام للشكل هو المثلث.

الخطوة الثانية: تتمثل في بناء شكل هندسي الإطار العام له المثلث و يمكن توسيع هذا الشكل بحيث يكون له امتداد نوني منتظم, شكل(1) يوضح ذلك.



شكل(1): يوضح امتداد الشكل الهندسي

و هكذا نستمر.

- تم بناء الأشكال الهندسية بالاستعانة بالمفاهيم التالية:

نقطة انطلاق: و هي النقطة التي تنطلق منها (n) من المستقيمات, في شكل(2) نقطة الانطلاق هي (b), و يمكن أن تتعدد نقاط الانطلاق شكل(6) و يمكن أن تكون نقطة الانطلاق رأس للمثلث شكل(2) أو على أضلاعه شكل(11).

العاكس: و هو الضلع الذي يعكس المستقيمات المنطلقة من نقطة الانطلاق, في شكل(2) العاكس هو (ac), و يمكن أن يكون للشكل أكثر من عاكس شكل(20) و يمكن أن يكون العاكس الثاني على شكل نقطة شكل(23).

الجدار: و هو الضلع الذي تستقر عنده المستقيمات, في شكل(2) الجدار هو (ab) و يمكن أن يكون للشكل أكثر من جدار شكل(12), و يمكن أن يكون الجدار على شكل نقطة شكل(22).

الخطوة الثالثة: إيجاد الصيغة النونية للشكل من خلال عد المثلثات و استخدام الاستقراء, أو طريقة إيجاد الفروق, و جدول(1) يوضح ذلك.

جدول(1): يوضح عدد المثلثات و الصيغة النونية لشكل(2)

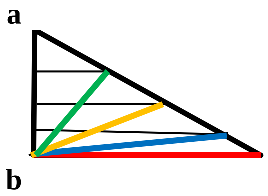
n	5	4	3	2	1
عدد المثلثات في الشكل	71	45	26	13	5
الصيغة النونية	$5+8+13+19+26+\cdots+\frac{n^2+5n+2}{2}=\frac{n^3+9n^2+14n+6}{6}$				

استراتيجية عد المثلثات (نقطة الانطلاق و الانعكاس و المستوى):

- نحدد نقطة الانطلاق و نقاط الانعكاس في الشكل.
- نحدد ضلع في الشكل و نعتبره مستوى.
- نقوم بتمرير القلم مبتدئين بنقطة الانطلاق أو نقطة الانعكاس حتى المستوى و نحسب عدد المثلثات.

و يمكن توضيح ذلك كما يلي:

أولاً: نقطة الانطلاق هي (b) و المستويات هي الأضلاع الملونة شكل(2).



شكل(2): يوضح مستويات الشكل الهندسي

عدد المثلثات في المستوى الأحمر ($4 \times 1 = 4$)

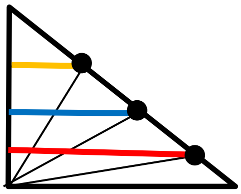
عدد المثلثات في المستوى الأزرق ($3 \times 2 = 6$)

عدد المثلثات في المستوى الذهبي ($2 \times 3 = 6$)

عدد المثلثات في المستوى الأخضر ($1 \times 4 = 4$)

عدد المثلثات المرسومة من نقطة الانطلاق حتى المستويات المختلفة يساوي (20).

ثانياً: نقاط الانعكاس الثلاث محدد بالشكل (●) و المستويات هي الأضلاع الملونة شكل(3).



شكل(3): يوضح نقاط الانعكاس للشكل الهندسي

عدد المثلثات من نقطة الانعكاس السفلى و المستوى الأحمر يساوي (3).

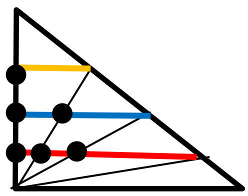
عدد المثلثات من نقطة الانعكاس الوسطى و المستوى الأزرق يساوي (2).

عدد المثلثات من نقطة الانعكاس العليا و المستوى الذهبي يساوي (1).

عدد المثلثات المرسومة من نقاط الانعكاس حتى المستويات المختلفة يساوي (6).

عدد المثلثات في شكل(4) عندما ($n = 3$) يساوي (26)

ملاحظة: يمكن حساب عدد المثلثات المرسومة من نقاط الانعكاس و المستويات المختلفة من خلال عدد نقاط تقاطع المستقيمات شكل(4) يوضح ذلك.



شكل(4): يوضح نقاط تقاطع المستقيمات للشكل الهندسي

الخطوة الرابعة: استخدام الاستقراء الرياضي لبرهان صحة العلاقة التي تم التوصل إليها في الخطوة الثالثة.

خطوات الاستقراء الرياضي:

1- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = 1$.

2- نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = r$.

3- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = r + 1$.

مصطلحات البحث:

التعريف الإجرائي للمسألة الشكلية:

المسألة الرياضية الشكلية هي سؤال جديد و مميز يواجه الفرد و يحتاج إلى إجابة, و يعطى بصورة شكل هندسي ويتمثل هذا الشكل في المثلث.

الصورة النونية:

هي دالة رياضية تعطى بدلالة متغير (n) أو متغيرين (n, m).

التعريف الإجرائي للاستقراء:

هو الوصول إلى نتائج أسئلة البحث اعتماداً على حالات خاصة أو جزئيات من الحالة العامة. أي أن الجزئيات أو الحالات الخاصة هي أمثلة من الحالة العامة أو النتيجة التي تم استقراؤها.

المثلث:

شكل مغلق له ثلاثة أضلاع و ثلاث زوايا.

الخلفية النظرية:

المسألة الرياضية.

يرى (عبدالهادي وآخرون، 2002، ص 114) أن " المسألة الرياضية تتكون من سؤال يحتاج إلى إجابة علماً بأنه ليس كل سؤال يحتاج إلى إجابة هو مسألة", ويرى Hildebrandt أن المسألة الرياضية مستويات متنوعة منها ما يستخدم مفهوماً رياضياً أو تعميماً، ويتناول موقفاً لم يتعرض له الفرد سابقاً، ومنها ما يتطلب مقداراً معيناً من التجريب والملاحظة وجمع البيانات، ومنها ما يرتبط بالظروف والمواقف التي لم يتعرض لها الفرد ويتطلب منه إجراء تعديل وتغيير في هذه الظروف، ونوع يتطلب صياغة فرضيات أو حلول مقترحة تقدم، وأدلة أو براهين تناقش (أبوزينة، 2010، ص 310).

إن للمسائل الرياضية أنواع وأشكال متعددة في ضوء المتغيرات البنائية لها، فمن حيث الألفة تقسم المسائل إلى روتينية ومسائل غير روتينية، ومن حيث صياغة المسألة، منها ما يصاغ بقالب لغوي و منها ما يصاغ بقالب رمزي أو شكل أو معادلات، ومن حيث محتوى المسألة ، فمنها ما يكون محتواها مصاغاً بصورة مجملة، و منها ما يكون محتواها مصاغ بصورة مجزئه، ومنها ما يكون محتواها مصاغاً بصورة تنظيم التفكير، ومن حيث عدد الخطوات، فمنها ما يحتاج حله إلى خطوة واحدة ومنها ما يحتاج إلى خطوتين أو أكثر، ومن حيث عدد العمليات الحسابية، منها ما يحتاج إلى عملية واحدة، ومنها ما يحتاج إلى عمليتين أو أكثر، ومن حيث الحاجة إلى العلاقات الواردة بالمسألة للحل، نقسم المسائل الرياضية إلى مسائل بها معلومات زائدة ومسائل بها معلومات ناقصة، ومسائل ليس بها أي من هذين النوعين من المعلومات، وهذه الأنواع من المسائل بدأت تلقى اهتماما خاصاً من قبل القائمين على تدريس الرياضيات نظراً لأهميتها في التدريب على فهم التلميذ للمسألة.(Bernadette, 2010, p87)

ويواجه الطلاب صعوبات أثناء قيامهم بحل المسألة الرياضية حيث صنفها (عفانة، 1996، ص 189) إلى ثلاثة أبعاد:

1- صعوبات التفكير في معطيات المسألة،
2- وصعوبات التفكير في إجراءات حل المسألة،
3- وصعوبات التفكير في مصطلحات المسألة.

ويحدد جورج بوليا مراحل أربعة يمر فيها حل المسألة وهي فهم المسألة، وابتكار الخطة، وتنفيذ فكرة الحل، ومراجعة الحل.

الاستقراء:

الاستقراء هو استدلال صاعد، يبدأ من الجزئيات وينتهي إلى الأحكام أو النتائج العامة أو الكلية، وبهذا يكون نتيجة الاستقراء أعم من أية مقدمة من المقدمات التي تم الاعتماد عليها في الوصول إلى هذه النتيجة. (أبوزينة، 2010، ص 33)

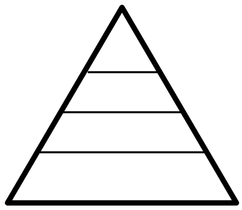
ويعرف الاستقراء أنه الوصول إلى الحالة العامة من خلال مجموعة من الحالات الخاصة (فرج الله، 2014، ص 100)

نتائج البحث:

الإجابة عن السؤال الفرعي الأول: للإجابة عن السؤال الفرعي الأول والذي ينص على ما هي المسائل الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية من الدرجة الأولى؟ فقد حصر الباحث المسائل التالية:

مسألة شكلية(1): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث له عدد n من المستقيمات الموازية لقاعدته, شكل(5).



شكل (5): يوضح مسألة شكلية(1)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(1) من خلال العلاقة التالية:

$$2 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = (n + 1)$$

البرهان:

و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما يلي:

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = 1$

$22 = (1 + 1) \rightarrow 2 =$ $\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$

- نفرض العلاقة صحيحة عندما $n = r$ فتصبح العلاقة.

$$2 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots + 1 = r + 1$$

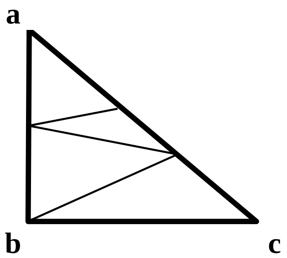
- نبرهن صحة العلاقة عندما $\mathrm{n} = \mathrm{r} + 1$ (الحد المضاف للطرفين هو (1)) فتصبح العلاقة.

$$2 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = (\mathrm{r} + 1) + 1 = \{(r + 1) + 1\}$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة $\forall\, \mathrm{n} \in \mathrm{N}^{+}$

مسألة شكلية (2): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: من نقطة الانطلاق (b) نرسم مستقيماً إلى (ac) ثم ينعكس إلى (ab) ثم ينعكس إلى (ac), (n) مرة. شكل(6).



شكل (6): يوضح مسألة شكلية(2)

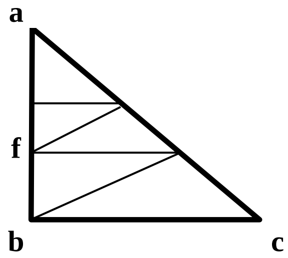
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(2) من خلال العلاقة التالية:

$$3 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2n + 1$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (1), الحد المضاف للطرفين هو (2).

مسألة شكلية (3): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: من نقطة الانطلاق (b) نرسم المستقيم (b d) ثم نرسم (d f) موازياً لـ (bc) ثم من نقطة الانطلاق (f) نكرر نفس الخطوات (n) مرة.(n) عدد المستقيمات الموازية لـ (bc),شكل(7).



شكل (7): يوضح مسألة شكلية(3)

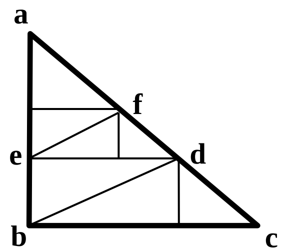
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(3) من خلال العلاقة التالية:

$$5+4+4+4+\cdots+4=4n+1$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (1), الحد المضاف للطرفين هو (4).

مسألة شكلية(4): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: نفس خطوات مسألة شكلية (2) ثم ننزل من (d) و (f) مستقيمين إلى (bc) و (ef) على التوالي ثم نكرر نفس الخطوات (n)مرة. (n) عدد المستقيمات الموازية لـ (bc), شكل(8).



شكل (8): يوضح مسألة شكلية(4)

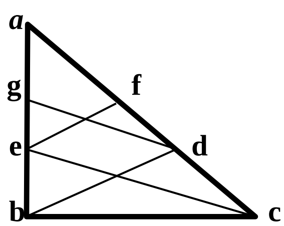
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(4) من خلال العلاقة التالية:

$$7+6+6+6+\cdots+6=6n+1$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (1), الحد المضاف للطرفين هو (6).

مسألة شكلية(5): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: من (b) نرسم مستقيماً إلى (d) ثم إلى (g), (n) مرة و من (c) نرسم مستقيماً إلى (e) ثم إلى (f), (n) مرة, شكل(9).



شكل (9): يوضح مسألة شكلية(5)

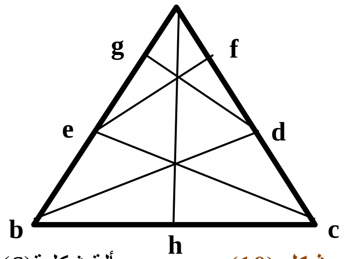
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(5) من خلال العلاقة التالية:

$$8+6+6+6+6+\cdots+6=6n+1$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (1), الحد المضاف للطرفين هو (6).

مسألة شكلية(6): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: من (b) نرسم مستقيماً إلى (d) ثم إلى (g), (n) مرة و من (c) نرسم مستقيماً إلى (e) ثم إلى (f), (n) مرة, نصل(ah) حيث يمر بنقاط التقاطع, شكل(10).



شكل (10): يوضح مسألة شكلية(6)

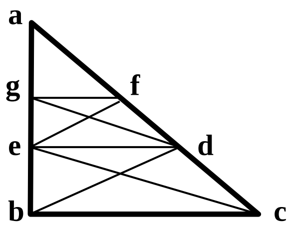
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(6) من خلال العلاقة التالية:

$$616 + 10 + 10 + 10 + 10 + \cdots + 10 = 10n +$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (1), الحد المضاف للطرفين هو (6).

مسألة شكلية(7): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: نفس خطوات مسألة شكلية (2), ثم نصل (c e) و (dg) ونكرر الخطوات (n) مرة, (n) عدد المستقيمات الموازية لـ (bc), شكل(11).



شكل (11): يوضح مسألة شكلية(7)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(7) من خلال العلاقة التالية:

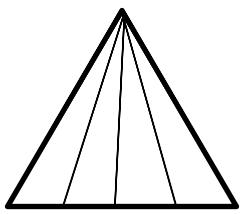
$$12 + 13 + 13 + 13 + \cdots + 13 = 13n - 1$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (1), الحد المضاف للطرفين هو (13).

الإجابة عن السؤال الفرعي الثاني: للإجابة عن السؤال الفرعي الثاني والذي ينص على ما هي المسائل الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية من الدرجة الثانية؟ فقد حصر الباحث المسائل التالية:

مسألة شكلية(8): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث له عدد n من المستقيمات النازلة من رأسه إلى قاعدته, شكل(12).



شكل (12): يوضح مسألة شكلية(8)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(8) من خلال العلاقة التالية:

$$3+3+4+5+6+7+\cdots+(n+1), n \geq 2 \; = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

البرهان:

و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما يلي:

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = 1$

$$3 = \frac{1}{2}(1+1)(1+2) \;\to\; 3 = 3$$ ∴ العلاقة صحيحة عندما $n = 1$

- نفرض العلاقة صحيحة عندما $n = r$ فتصبح العلاقة.

$$3+3+4+5+6+7+\cdots+(r+1) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

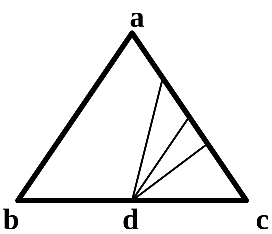
- نبرهن صحة العلاقة عندما $n = r+1$ (الحد المضاف للطرفين هو $(r+2)$ فتصبح العلاقة.

$$3+3+4+5+6+7+\cdots+(r+1)+(r+2) = \frac{(r+1)(r+2)}{2} + (r+2) = \frac{(r+2)}{2}\{r+1+2\}$$
$$= \frac{((r+1)+1)}{2}\{(r+2)+1\}$$

∴ العلاقة صحيحة $\forall\, n \in N^{+}$

مسألة شكلية(9): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (ac), شكل(13).



الشكل (13): يوضح مسألة شكلية(9)

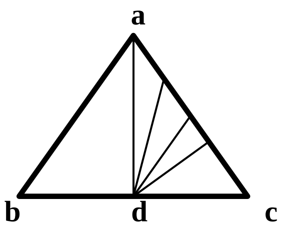
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(9) من خلال العلاقة التالية:

$$2+2+3+4+5+6+\cdots+n \;\; , n \geq 2 = \frac{n^2+n+2}{2}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (8), الحد المضاف للطرفين هو $(r+1)$.

مسألة شكلية(10): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) نصل (da) و من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (ac), شكل(14).



الشكل (14): يوضح مسألة شكلية(10)

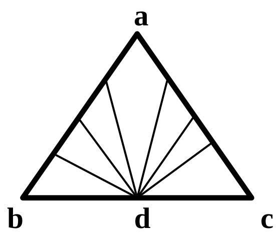
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(10) من خلال العلاقة التالية:

$$5+3+4+5+6+\cdots+(n+1) \quad ,n\geq 2=\frac{n^2+3n+6}{2}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (8), الحد المضاف للطرفين هو $(r+2)$.

مسألة شكلية(11): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (ac) و الضلع (ab), شكل(15).



شكل (15): يوضح مسألة شكلية(11)

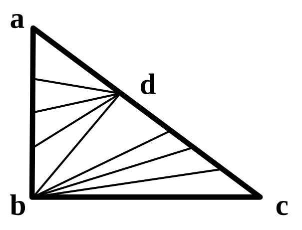
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(11) من خلال العلاقة التالية:

$$3+4+6+8+10+\cdots+2n\,,n\geq 2=n^2+n+1$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (8), الحد المضاف للطرفين هو $(2r+2)$.

مسألة شكلية(12): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc), نصل (bd), من (b) و (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى (cd) و (ab) على التوالي, شكل(16).



الشكل (16): يوضح مسألة شكلية(12)

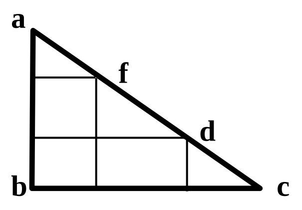
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(12) من خلال العلاقة التالية:

$$8+7+9+11+13+\cdots+(2n+3) \quad ,n\geq 2=n^2+4n+3$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (8), الحد المضاف للطرفين هو $(2r+5)$.

مسألة شكلية(13): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc), من (d) نرسم مستقيمين أحدهما موازياً لـ(bc) و الآخر نازلاً إلى (bc) و موازياً لـ(ab), (n) عدد النقاط المرسومة على (ac), شكل(17).



الشكل (17): يوضح مسألة شكلية(13)

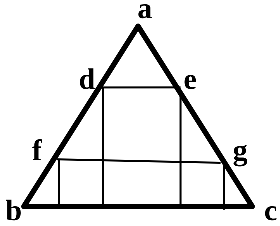
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(13) من خلال العلاقة التالية:

$$3+3+4+5+6+7+\cdots+(n+1), n\geq 2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (8), الحد المضاف للطرفين هو $(r+2)$.

مسألة شكلية(14): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) نصل (de) و (fg) بالتوازي مع (bc), من النقاط (d) و (e) و (f) و (g) ننزل مستقيمات متوازية إلى (bc), (n) عدد النقاط الواقعة على (ac), شكل(18).



الشكل (18): يوضح مسألة شكلية(14)

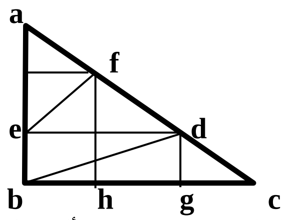
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(14) من خلال العلاقة التالية:

$$4+5+7+9+11+\cdots+(2n+1), n\geq 2=n^2+2n+1$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (8), الحد المضاف للطرفين هو $(2r+3)$.

مسألة شكلية(15): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc), من (d) نرسم ثلاثة مستقيمات الأول (de) موازياً لـ(bc) و الثاني (dg) نازلاً إلى (bc) و موازياً لـ(ab), و الثالث نصل (db),(n) عدد النقاط المرسومة على (ac), شكل(19).



شكل (19): يوضح مسألة شكلية(15)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(15) من خلال العلاقة التالية:

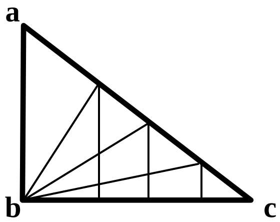
$$17+10+14+18+22+\cdots+(4n+2)\ , n\geq 2=2n^2+4n+$$

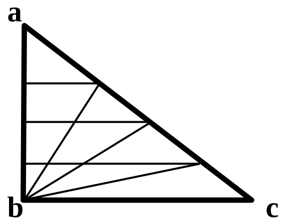
البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (8), الحد المضاف للطرفين هو $(4r+6)$.

الإجابة عن السؤال الفرعي الثالث: للإجابة عن السؤال الفرعي الثالث والذي ينص على ما هي المسائل الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية من الدرجة الثالثة؟ فقد حصر الباحث المسائل التالية:

مسألة شكلية(16): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: من (b) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (ab) أو (bc) موازية لـ (bc) أو (ab) على التوالي, شكل(20).





الشكل (20): يوضح مسألة شكلية(16)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(16) من خلال العلاقة التالية:

$$5+8+13+19+26+\cdots+\frac{n^2+5n+2}{2}, n\geq 2=\frac{n^3+9n^2+14n+6}{6}$$

البرهان:

و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما يلي:

- نبرهن صحة العلاقة عندما $n=1$

$5=\frac{(1)^3+9(1)^2+14(1)+6}{6} \rightarrow 5=5$ ∴ العلاقة صحيحة عندما $n=1$

- نفرض العلاقة صحيحة عندما $n=r$ فتصبح العلاقة.

$$5+8+13+19+26+\cdots+\frac{r^2+5r+2}{2}=\frac{r^3+9r^2+14r+6}{6}$$

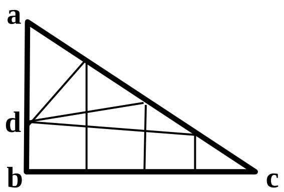
- نبرهن صحة العلاقة عندما $\mathrm{n}=\mathrm{r}+1$ (الحد المضاف للطرفين هو $\left(\frac{(r+1)^2+5(r+1)+2}{2}\right)$ فتصبح العلاقة.

$$5+8+13+19+26+\cdots+\frac{r^2+5r+2}{2}+\left(\frac{(r+1)^2+5(r+1)+2}{2}\right)$$
$$=\frac{r^3+9r^2+14r+6}{6}+\left(\frac{(r+1)^2+5(r+1)+2}{2}\right)$$
$$=\frac{r^3+9r^2+14r+6+3(r^2+7r+8)}{6}$$
$$=\frac{r^3+12r^2+35r+30)}{6}=\frac{(r^3+3r^2+3r+1)+9(r^2+2r+1)+14(r+1)+6)}{6}$$
$$=\frac{(r+1)^3+9(r+1)^2+14(r+1)+6}{6}$$

∴ العلاقة صحيحة $\forall\, \mathrm{n} \in \mathrm{N}^+$

مسألة شكلية(17): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث(abc), من (d) نرسم عدد (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (bc) موازية لـ (ab), شكل(21).



شكل (21): يوضح مسألة شكلية(17)

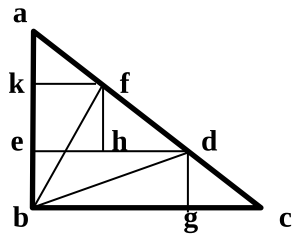
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(17) من خلال العلاقة التالية:

$$3+5+9+14+20+\cdots+\frac{n}{2}(n+3), n\geq 2=\frac{n^3+6n^2+5n+6}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left(\frac{(r+1)}{2}(r+4)\right)$.

مسألة شكلية(18): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc), من(b) نرسم المستقيمات (bd) و(bf) ثم نصل (dg) و(fh) موازية لـ(ab) ونصل (de) و(fk) موازية لـ (bc),(n) عدد النقاط المرسومة على (ac), شكل(22)



شكل (22): يوضح مسألة شكلية(18)

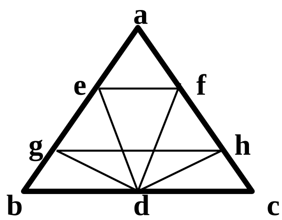
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(18) من خلال العلاقة التالية:

$$7+10+15+21+28+\cdots+\frac{n^2+5n+6}{2}, n\geq 2=\frac{n^3+9n^2+26n+6}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left(\frac{(r+1)^2+5(r+1)+6}{2}\right)$.

مسألة شكلية(19): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (ac) فتنعكس موازية لـ(bc) إلى الضلع (ab),ثم تنعكس إلى النقطة (d), شكل(23).



شكل (23): يوضح مسألة شكلية(19)

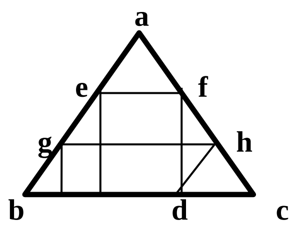
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(19) من خلال العلاقة التالية:

$$5+13+26+43+64+\cdots+(2n^2+3n-1), n\geq 2=\frac{4n^3+15n^2+5n+6}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(2(r+1)^2+3(r+1)-1)$.

مسألة شكلية(20): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (ac) و تنعكس إلى الضلع (ab), موازية لـ(bc), ثم تنزل المستقيمات على (bd), شكل(24).



شكل (24): يوضح مسألة شكلية(20)

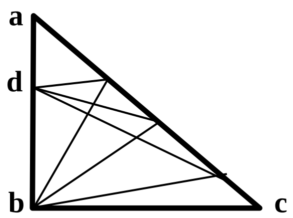
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(20) من خلال العلاقة التالية:

$$4+7+12+18+25+\cdots+\frac{n}{2}(n+5), n\geq 2=\frac{n^3+9n^2+8n+6}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left(\frac{r+1}{2}(r+6)\right)$.

مسألة شكلية(21): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (b) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), شكل(25).



شكل (25): يوضح مسألة شكلية(21)

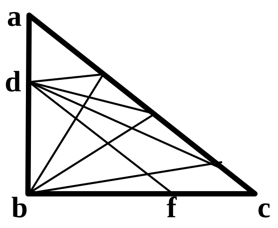
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(21) من خلال العلاقة التالية:

$$5+10+18+28+40+\cdots+n(n+3), n\geq 2=\frac{n^3+6n^2+5n+3}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left((r+1)(r+4)\right)$.

مسألة شكلية(22): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (b) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (df), شكل(26).



شكل (26): يوضح مسألة شكلية(22)

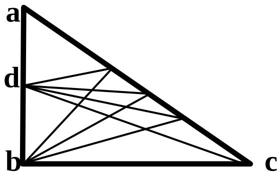
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(22) من خلال العلاقة التالية:

$$9+15+25+37+51+\cdots+(n^2+5n+1), n\geq 2=\frac{n^3+9n^2+11n+6}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left((r+1)^2+5(r+1)+1\right)$.

مسألة شكلية(23): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (b) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (dc), شكل(27).



شكل (27): يوضح مسألة شكلية(23)

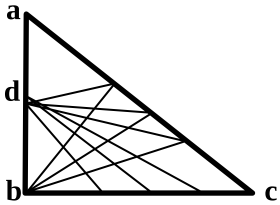
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(23) من خلال العلاقة التالية:

$$12+17+27+39+53+\cdots+(n^2+5n+3), n\geq 2=\frac{n^3+9n^2+17n+9}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+1)^2+5(r+1)+3)$.

مسألة شكلية(24): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (b) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), ثم تنعكس إلى (bc), شكل(28).



شكل (28): يوضح مسألة شكلية(24)

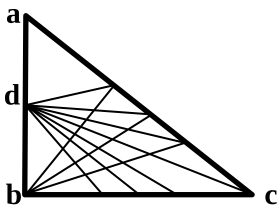
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(24) من خلال العلاقة التالية:

$$9+27+57+98+150+\cdots+\frac{n}{2}(11n+5), n\geq 2=\frac{11n^3+24n^2+13n+6}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left(\frac{(r+1)}{2}(11(r+1)+5)\right)$.

مسألة شكلية(25): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (b) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), ثم تنعكس إلى (bc), نصل (dc), شكل(29).



شكل (29): يوضح مسألة شكلية(25)

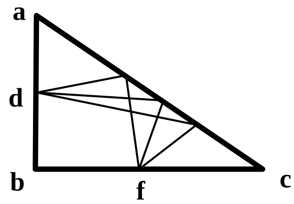
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(25) من خلال العلاقة التالية:

$$18+38+72+117+173+\cdots+\frac{11n^2+13n+6}{2}, n\geq 2=\frac{11n^3+36n^2+43n+18}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left(\frac{11(r+1)^2+13(r+1)+6}{2}\right)$.

مسألة شكلية(26): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من(f) نرسم(n) من المستقيمات إلى(ac) فتنعكس إلى(d), شكل(30).



شكل (30): يوضح مسألة شكلية(26)

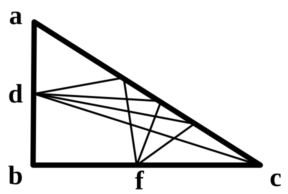
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(26) من خلال العلاقة التالية:

$$3+7+14+23+34+\cdots+(n^2+2n-1), n\geq 2=\frac{2n^3+9n^2+n+6}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+1)^2+2(r+1)-1)$.

مسألة شكلية(27): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (dc) شكل(31).



شكل (31): يوضح مسألة شكلية(27)

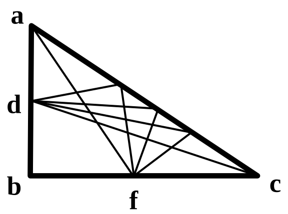
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(27) من خلال العلاقة التالية:

$$9+13+22+33+46+\cdots+(n^2+4n+1), n\geq 2=\frac{2n^3+15n^2+19n+18}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+1)^2+4(r+1)+1)$.

مسألة شكلية(28): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (dc) و (fa) شكل(32).



شكل (32): يوضح مسألة شكلية(28)

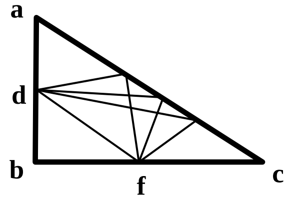
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(28) من خلال العلاقة التالية:

$$20+21+32+45+60+\cdots+(n+1)(n+5), n\geq 2=\frac{2n^3+21n^2+49n+48}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+2)(r+6))$.

مسألة شكلية(29): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (df) شكل(33).



شكل (33): يوضح مسألة شكلية(29)

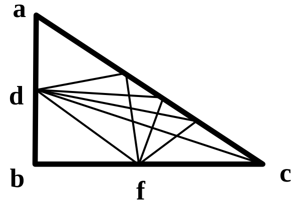
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(29) من خلال العلاقة التالية:

$$5+9+17+27+39+\cdots+(n^2+3n-1), n \geq 2 = \frac{n^3+6n^2+2n+6}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+1)^2+3(r+1)-1)$.

مسألة شكلية(30): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (dc) و (fd) شكل(34).



شكل (34): يوضح مسألة شكلية(30)

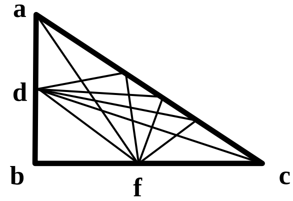
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(30) من خلال العلاقة التالية:

$$13+16+26+38+52+\cdots+(n^2+5n+2), n \geq 2 = \frac{n^3+9n^2+14n+15}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+1)^2+5(r+1)+2)$.

مسألة شكلية(31): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (dc) و (df) و (fa) شكل(35).



شكل (35): يوضح مسألة شكلية(31)

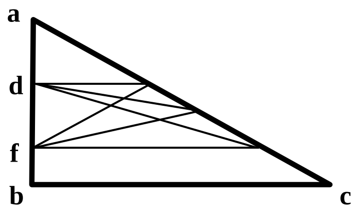
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(31) من خلال العلاقة التالية:

$$25+25+37+51+67+\cdots+(n^2+7n+7), n \geq 2 = \frac{n^3+12n^2+32n+30}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+1)^2+7(r+1)+7)$.

مسألة شكلية(32): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), شكل(36).



شكل (36): يوضح مسألة شكلية(32)

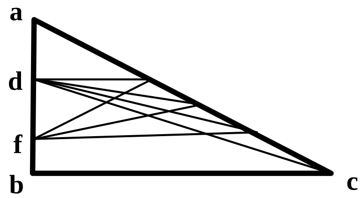
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(32) من خلال العلاقة التالية:

$$4+9+17+27+39+\cdots+(n^2+3n-1), n\geq 2=\frac{n^3+6n^2+2n+3}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+1)^2+3(r+1)-1)$.

مسألة شكلية(33): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (dc) شكل(37).



شكل (37): يوضح مسألة شكلية(33)

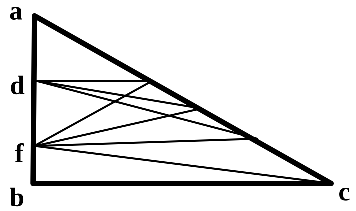
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(33) من خلال العلاقة التالية:

$$10+15+25+37+51+\cdots+(n^2+5n+1), n\geq 2=\frac{n^3+9n^2+11n+9}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+1)^2+5(r+1)+1)$.

مسألة شكلية(34): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (fc) شكل(38).



شكل (38): يوضح مسألة شكلية(34)

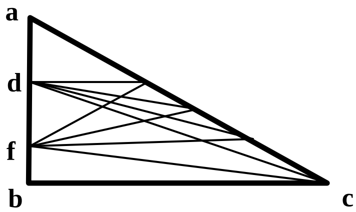
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(34) من خلال العلاقة التالية:

$$7+10+18+28+40+\cdots+n(n+3), n\geq 2=\frac{n^3+6n^2+5n+9}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left((r+1)(r+4)\right)$.

مسألة شكلية(35): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), نصل (dc) و (fc)شكل(39).



شكل (39): يوضح مسألة شكلية(35)

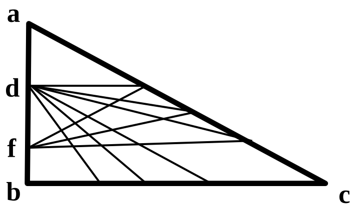
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(35) من خلال العلاقة التالية:

$$14+17+27+39+53+\cdots+(n^2+5n+3), n\geq 2=\frac{n^3+9n^2+17n+15}{3}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $((r+1)^2+5(r+1)+3)$.

مسألة شكلية(36): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), ثم تنعكس إلى (bc), شكل(40).



شكل (40): يوضح مسألة شكلية(36)

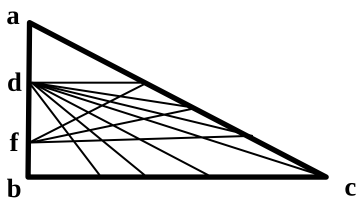
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(36) من خلال العلاقة التالية:

$$7+23+51+90+140+\cdots+\frac{n}{2}(11n+1), n\geq 2=\frac{11n^3+18n^2+7n+6}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left(\frac{r+1}{2}(11(r+1)+1)\right)$.

مسألة شكلية(37): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), ثم تنعكس إلى (bc), نصل (dc) شكل(41).



شكل (41): يوضح مسألة شكلية(37)

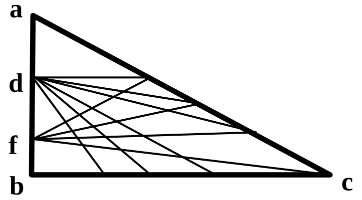
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول عدد المثلثات لمسألة شكلية(37) من خلال العلاقة التالية:

$$15+33+65+108+162+\cdots+\left(\frac{11n^2+9n+4}{2}\right), n\geq 2=\frac{11n^3+30n^2+31n+18}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو ($\frac{11(r+1)^2+9(r+1)+4}{2}$).

مسألة شكلية(38): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), ثم تنعكس إلى (bc), نصل (fc) شكل(42).



شكل (42): يوضح مسألة شكلية(38)

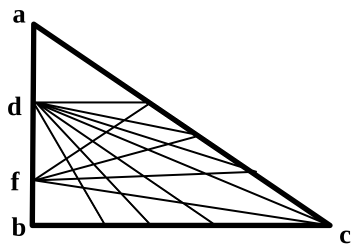
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(38) من خلال العلاقة التالية:

$$13+30+61+103+156+\cdots+\frac{11n^2+7n+2}{2}, n\geq 2=\frac{11n^3+27n^2+22n+18}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو ($\frac{11(r+1)^2+7(r+1)+2}{2}$).

مسألة شكلية(39): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (f) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) ثم تنعكس إلى (d), ثم تنعكس إلى (bc), نصل (dc) و (fc) شكل(43).



شكل (43): يوضح مسألة شكلية(39)

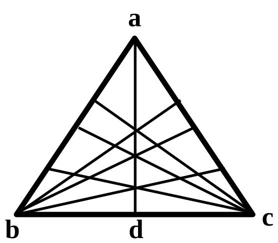
الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(39) من خلال العلاقة التالية:

$$25+42+77+123+180+\cdots+\frac{11n^2+15n+10}{2}, n\geq 2=\frac{11n^3+39n^2+58n+42}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو ($\frac{11(r+1)^2+15(r+1)+10}{2}$).

مسألة شكلية(40): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) من (b) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ac) و من (c) نرسم (n) من المستقيمات إلى (ab), نصل (ad) يمر بنقاط التقاطع, شكل(44).



شكل (44): يوضح مسألة شكلية(40)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(40) من خلال العلاقة التالية:

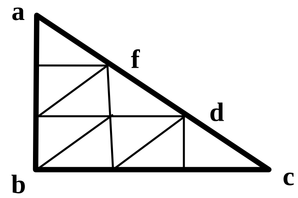
$$16+29+51+79+\cdots+(3n^2+7n+3), n\geq 2 = n^3+5n^2+7n+3$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\left(\frac{3(r+1)^2+7(r+1)+3}{2}\right)$.

الإجابة عن السؤال الفرعي الرابع: للإجابة عن السؤال الفرعي الرابع والذي ينص على ما هي المسائل الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية من الدرجة الثالثة (فردي و زوجي)؟ فقد حصر الباحث المسائل التالية:

مسألة شكلية(41): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) قائم في (b) و متساوي الساقين, من (d) نرسم مستقيمين أحدهما موازياً لـ(bc) و الآخر نازلاً إلى (bc) و موازياً لـ(ab), نرسم قطر لكل مربع, (n) عدد النقاط المرسومة على (ac), شكل(45).



شكل (45): يوضح مسألة شكلية(41)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء و طريقة الفروق يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية (41), جدول(2) يوضح ذلك:

الجدول (2): يوضح طريقة الفروق لمسألة شكلية(41)

n=عدد فردي	عدد المثلثات	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3		n=عدد زوجي	عدد المثلثات	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3	
1	7					2	16				
3	31	24				4	51	35			
5	79	48	24			6	114	63	28		
7	159	80	32	8		8	213	99	36	8	
9	279	120	40	8	0	10	356	143	44	8	0
11	447	168	48	8	0	12	551	195	52	8	0

يتضح من جدول(2) أن الصيغة النونية تعطى بالعلاقة التالية:

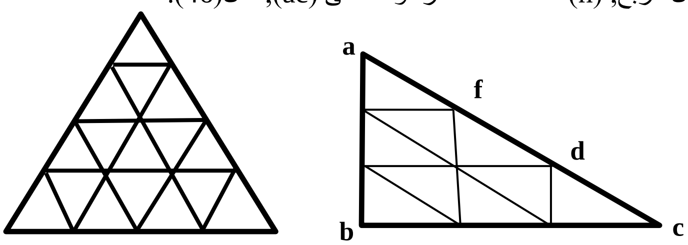
$$an^3+bn^2+cn+d$$

و بإيجاد المتغيرات (a,b,c,d) نحصل على الصيغة النونية لمجموع عدد المثلثات لمسألة شكلية (41) من خلال العلاقة التالية:

$$7+9+15+20+28+\cdots=\begin{cases}\dfrac{n^3+9n^2+23n+9}{6}, n= \text{عدد فردي}\\[2ex]\dfrac{n^3+9n^2+23n+6}{6}, n= \text{عدد زوجي}\end{cases}$$

مسألة شكلية(42): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) قائم في (b) و متساوي الساقين, من (d) نرسم مستقيمين أحدهما موازياً لـ(bc) و الآخر نازلاً إلى (bc) و موازياً لـ(ab), نرسم قطر لكل مربع, (n) عدد النقاط المرسومة على (ac),شكل(46).



شكل (46): يوضح مسألة شكلية(42)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء و طريقة الفروق يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية (42), جدول(3) يوضح ذلك:

الجدول (3): يوضح طريقة الفروق لمسألة شكلية(42)

n=عدد فردي	عدد المثلثات	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3		n=عدد زوجي	عدد المثلثات	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3	
1	5					2	13				
3	27	22				4	48	35			
5	78	51	29			6	118	70	35		
7	170	92	41	12		8	235	117	47	12	
9	315	145	53	12	0	10	411	176	59	12	0
11	525	210	65	12	0	12	658	247	71	12	0

يتضح من جدول(3) أن الصيغة النونية تعطى بالعلاقة التالية:

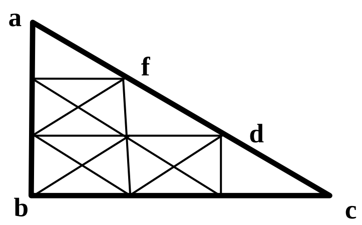
$$an^3 + bn^2 + cn + d$$

و بإيجاد المتغيرات (a, b, c, d) نحصل على الصيغة النونية لمجموع عدد المثلثات لمسألة شكلية (42) من خلال العلاقة التالية:

$$5 + 8 + 14 + 21 + 30 + \cdots = \begin{cases} \dfrac{2n^3 + 11n^2 + 18n + 9}{8}, n = \text{عدد فردي} \\ \dfrac{2n^3 + 11n^2 + 18n + 8}{8}, n = \text{عدد زوجي} \end{cases}$$

مسألة شكلية(43): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: المثلث (abc) قائم في (b) و متساوي الساقين, من (d) نرسم مستقيمين أحدهما موازياً لـ(bc) و الآخر نازلاً إلى (bc) و موازياً لـ(ab), نرسم قطرين لكل مربع, (n) عدد النقاط المرسومة على (ac), شكل(47).



شكل (47): يوضح مسألة شكلية(43)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء و طريقة الفروق يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية (43), جدول(4) يوضح ذلك:

الجدول (4): يوضح طريقة الفروق لمسألة شكلية(43)

n=عدد فردي	عدد المثلثات	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3		n=عدد زوجي	عدد المثلثات	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3	
1	13					2	39				
3	87	74				4	160	121			
5	268	181	107			6	412	252	131		
7	602	334	153	46		8	841	429	177	46	
9	1137	535	201	48	2	10	1493	652	223	46	0
11						12	2414	921	269	46	0

يتضح من جدول(4) أن الصيغة النونية عندما (n=عدد زوجي) تعطى بالعلاقة التالية:

$$an^3 + bn^2 + cn + d$$

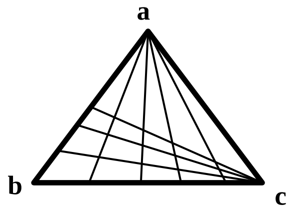
و بإيجاد المتغيرات (a,b,c,d) نحصل على الصيغة النونية لمجموع عدد المثلثات لمسألة شكلية (43) من خلال العلاقة التالية: $13+$

$$26+48+73+108+\cdots=\begin{cases} \text{غير منتظم}, n = \text{عدد فردي} \\ \frac{23n^3+117n^2+106n+72}{24}, n = \text{عدد زوجي} \end{cases}$$

الإجابة عن السؤال الفرعي الخامس: للإجابة عن السؤال الفرعي الخامس والذي ينص على ما هي المسائل الشكلية التي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية ذات متغيرين؟ فقد حصر الباحث المسائل التالية:

مسألة شكلية(44): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من أحد الرؤوس و ليكن (a) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (c) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (ab), شكل(48).



شكل (48): يوضح مسألة شكلية(44)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(44) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2}$$

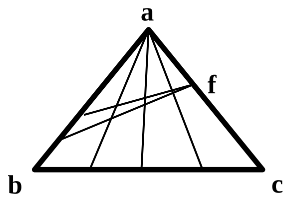
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(44) من خلال العلاقة التالية:

$$8+19+37+61+91+\cdots+(3n^2+3n+1), n\geq 2=(n+1)^3$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+3(r+1)+1)$.

مسألة شكلية(45): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من أحد الرؤوس و ليكن (a) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (ab), شكل(49).



شكل (49): يوضح مسألة شكلية(45)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(45) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+1)[(m+1)(n+2)+m(m-1)]}{2}$$

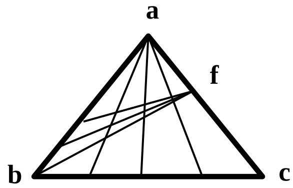
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(44) من خلال العلاقة التالية:

$$6+15+31+53+81+\cdots+(3n^2+n+1), n\geq 2=(n+1)(n^2+n+1)$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+(r+1)+1)$.

مسألة شكلية(46): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من أحد الرؤوس و ليكن (a) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (ab), نصل (fb), شكل(50).



شكل (50): يوضح مسألة شكلية(46)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(46) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+1)[(n+2)(m+2)+m(m+1)+2]}{2}$$

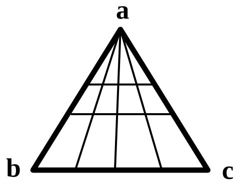
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(46) من خلال العلاقة التالية:

$$13+23+42+67+98+\cdots+(3\mathrm{n}^2+4\mathrm{n}+3), n\geq 2=\frac{(\mathrm{n}+1)}{2}(2\mathrm{n}^2+5\mathrm{n}+6)$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+4(r+1)+3)$.

مسألة شكلية(47): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من أحد الرؤوس و ليكن (a) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (ac) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (ab) موازية لـ(bc), شكل(51).



شكل (51): يوضح مسألة شكلية(47)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(47) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(m+1)}{2}(n+1)(n+2)$$

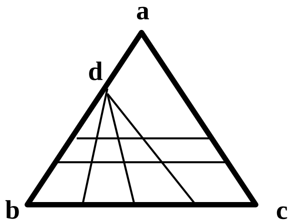
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(47) من خلال العلاقة التالية:

$$6+12+22+35+51+\cdots+\left(\frac{3n^2+5n+2}{2}\right), n\geq 2=\frac{(n+2)}{2}(n+1)^2$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(\frac{3(r+1)^2+5(r+1)+2}{2})$.

مسألة شكلية(48): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (ac) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db) موازية لـ(bc), شكل(52).



شكل (52): يوضح مسألة شكلية(48)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(48) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{n(n+1)(m+1)}{2}+m+1$$

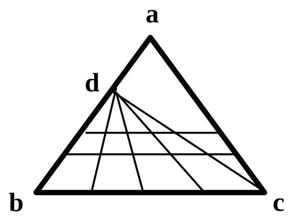
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(48) من خلال العلاقة التالية:

$$4+8+16+27+41+\cdots+\left(\frac{3n^2+n+2}{2}\right), n\geq 2=\frac{(n+1)}{2}(n^2+n+2)$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(\frac{3(r+1)^2+(r+1)+2}{2})$.

مسألة شكلية(49): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (ac) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db) موازية لـ(bc), نصل (dc), شكل(53).



شكل (53): يوضح مسألة شكلية(49)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(49) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+1)(n+2)(m+1)}{2}+m+2$$

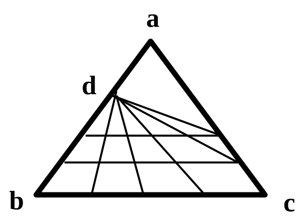
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(49) من خلال العلاقة التالية:

$$8+10+18+29+43+\cdots+\left(\frac{3n^2+n+6}{2}\right), n\geq 2=\frac{(n+2)}{2}[(n+1)^2+2]$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(\frac{3(r+1)^2+(r+1)+6}{2})$.

مسألة شكلية(50): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (d) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (ac) ثم تنعكس إلى (db) موازية لـ(bc), شكل(54).



شكل (54): يوضح مسألة شكلية(50)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(50) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{3(n+1)(m+1)(n+m)+m^3+6m^2-m+6}{6}$$

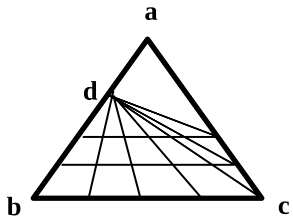
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(50) من خلال العلاقة التالية:

$$6+18+38+65+99+\cdots+\frac{7n^2+5n-2}{2}, n\geq 2=\frac{7n^3+18n^2+5n+6}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $\frac{7(n+1)^2+5(n+1)-2}{2}$.

مسألة شكلية(51): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (d) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (ac) ثم تنعكس إلى (db) موازية لـ(bc), نصل(dc), شكل(55).



شكل (55): يوضح مسألة شكلية(51)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(51) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{3(n+1)(m+1)(n+m+2)+m^3+9m^2+14m+12}{6}$$

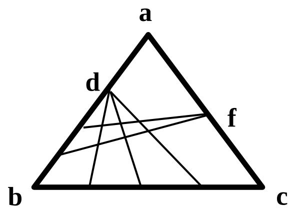
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(51) من خلال العلاقة التالية:

$$14+27+50+80+117+\cdots+\frac{7n^2+11n+4}{2}, n\geq 2=\frac{7n^3+27n^2+32n+18}{6}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(2(r+1)^2+5(r+1)+2)$.

مسألة شكلية(52): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db), شكل (56):.



شكل (56): يوضح مسألة شكلية(52)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(52) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+1)[n(m+1)+m(m-1)]}{2}+m+1$$

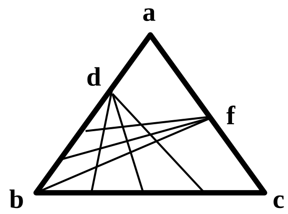
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(52) من خلال العلاقة التالية:

$$4+11+25+45+71+\cdots+(3n^2-n+1), n\geq 2=(n+1)(n^2+1)$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2-(r+1)+1)$.

مسألة شكلية(53): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db), نصل (fb), شكل(57).



شكل (57): يوضح مسألة شكلية(53)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(53) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+1)[n(m+2)+m(m+1)]}{2}+n+m+3$$

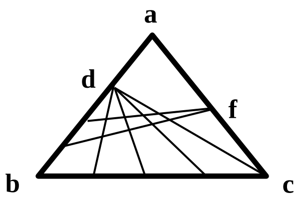
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(53) من خلال العلاقة التالية:

$$10+18+35+58+87+\cdots+(3n^2+2n+2), n\geq 2=\frac{(2n+3)}{2}[n^2+n+2]$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+2(r+1)+2)$.

مسألة شكلية(54): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db), نصل (dc), شكل(58).



شكل (58): يوضح مسألة شكلية(54)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(54) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+2)\left[(\mathrm{n}+1)(\mathrm{m}+1)+\mathrm{m}(\mathrm{m}-1)\right]}{2}+2(m+1)$$

عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(54) من خلال العلاقة التالية:

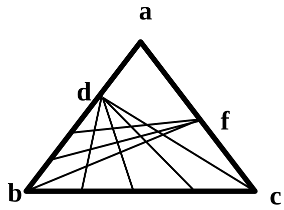
$$10+18+35+58+87+\cdots+(3n^2+2n+2), n\geq 2=\frac{2n^3+5n^2+7n+6}{2}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+2(r+1)+2)$.

ملاحظة: نلاحظ أن الصيغة النونية في مسألة شكلية (53) و مسألة شكلية (54) متشابهة عندما $(\mathrm{m}=\mathrm{n})$

مسألة شكلية(55): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db), نصل (dc)0 و (fb), شكل(59).



شكل (59): يوضح مسألة شكلية(55)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(55) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+2)[(n+1)(m+2)+m(m+1)]}{2}+n+2m+6$$

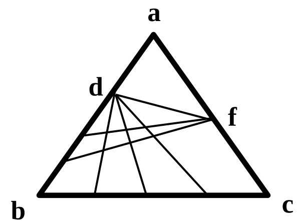
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(55) من خلال العلاقة التالية:

$$21+27+47+73+105+\cdots+(3n^2+5n+5), n\geq 2=(n+2)[(n+1)^2+3]$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+5(r+1)+5)$.

مسألة شكلية(56): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db), نصل (df), شكل(60).



شكل (60): يوضح مسألة شكلية(56)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(56) من خلال العلاقة التالية:

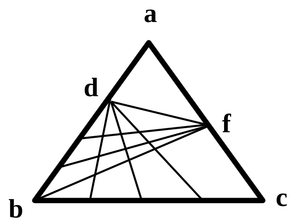
$$\frac{(n+1)(m+1)(n+m)}{2}+m+2$$

عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(56) من خلال العلاقة التالية: $7+15+31+53+81+\cdots+(3n^2+n+1), n\geq 2=n(n+1)^2+(n+2)$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+(r+1)+1)$.

مسألة شكلية(57): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db), نصل (fb)و (df), شكل(61).



شكل (61): يوضح مسألة شكلية(57)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(57) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+1)(m+2)(n+m+1)}{2}+n+m+4$$

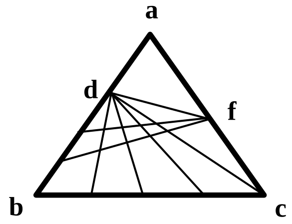
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(57) من خلال العلاقة التالية:

$$15+23+42+67+98+\cdots+(3n^2+4n+3), n\geq 2=\frac{(n+2)[(n+1)(2n+1)+4]}{2}$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+4(r+1)+3)$.

مسألة شكلية(58): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db), نصل (dc) و (df) شكل(62).



شكل (62): يوضح مسألة شكلية(58)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(58) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+2)(m+1)(n+m+1)}{2}+2m+4$$

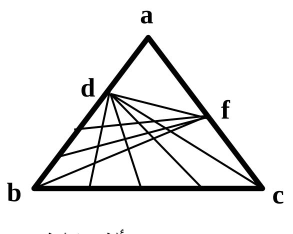
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(58) من خلال العلاقة التالية:

$$15+23+42+67+98+\cdots+(3n^2+4n+3), n\geq 2=\frac{(n+2)}{2}[2n^2+3n+5]$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+4(r+1)+3)$.

مسألة شكلية(59): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (d) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (f) نرسم (m) من المستقيمات إلى الضلع (db), نصل (dc) و(fb) و (df), شكل(63).



شكل (63): يوضح مسألة شكلية(59)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(59) من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{(n+2)}{2}(m+2)(n+m+2)+n+2m+8$$

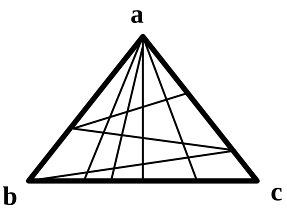
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(59) من خلال العلاقة التالية:

$$29+33+55+83+117+\cdots+(3n^2+7n+7), n\geq 2=(n+1)(n+2)^2+3n+8$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (16), الحد المضاف للطرفين هو $(3(r+1)^2+7(r+1)+7)$.

مسألة شكلية(60): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (a) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (b) نرسم مستقيماً إلى (ac) ثم ينعكس إلى (ab) ثم ينعكس إلى (ac) و هكذا (m) مرة في الشكل (m=3), شكل(64).



شكل (64): يوضح مسألة شكلية(60)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(60) من خلال العلاقة التالية:

$$4nm+3n+2m+1 \qquad n,m>2$$

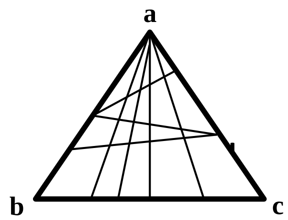
عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(60) من خلال العلاقة التالية:

$$10+17+25+33+41+\cdots+(8n+1), n\geq 2=4n^2+5n+1, n>2$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (8), الحد المضاف للطرفين هو $(8(r+1)+1)$.

مسألة شكلية(61): كم عدد المثلثات المرسومة في الشكل؟

وصف الشكل: مثلث (abc),من (a) نرسم (n) من المستقيمات إلى الضلع (bc), و من (d) نرسم مستقيماً إلى (ac) ثم ينعكس إلى (ab) ثم ينعكس إلى (ac) و هكذا (m) مرة في الشكل (m=3), شكل(65).



شكل (65): يوضح مسألة شكلية(61)

الصيغة النونية للمسألة: باستخدام الاستقراء يمكننا الحصول على عدد المثلثات لمسألة شكلية(61) من خلال العلاقة التالية:

$$2(n+m+2nm) \quad ,n,m>2$$

عندما $(m=n)$, يمكننا الحصول على عدد المثلثات في مسألة شكلية(61) من خلال العلاقة التالية:

$$8+16+24+32+40+\cdots+8n, n\geq 2=4n^2+4n, n>2$$

البرهان: و لبرهان صحة النتيجة التي تم التوصل إليها نستخدم الاستقراء الرياضي كما في مسألة شكلية (8), الحد المضاف للطرفين هو $(8r+8)$.

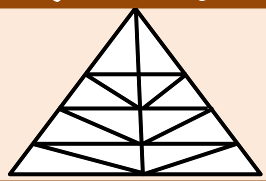
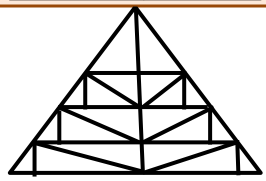
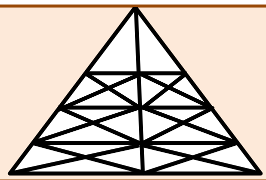
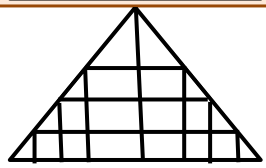
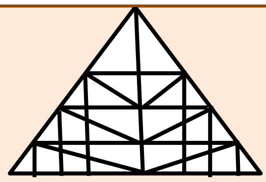
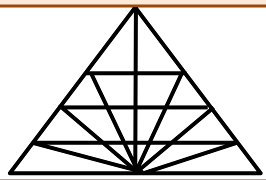
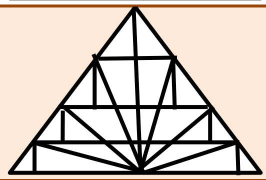
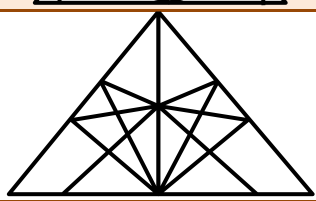
الإجابة عن السؤال الفرعي السادس: للإجابة عن السؤال الفرعي السادس والذي ينص على ما هي المسائل الشكلية المتناظرة والتي مجموع مثلثاتها تعطى بصيغة نونية؟ يعطي الباحث الملاحظات التالية:

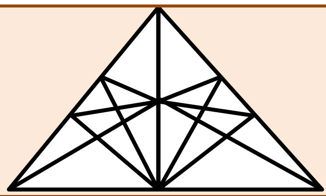
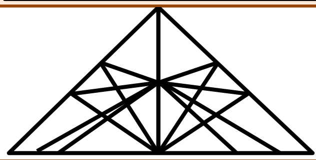
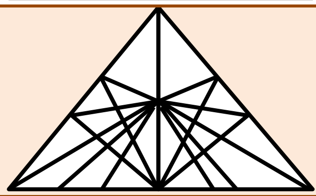
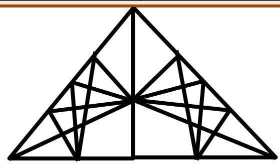
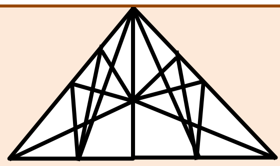
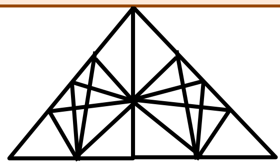
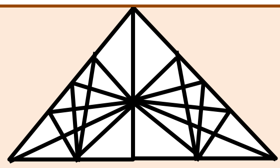
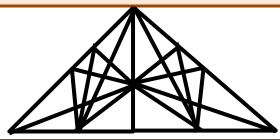
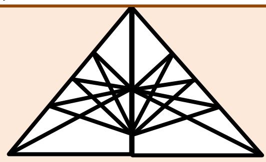
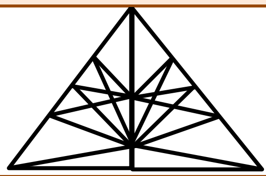
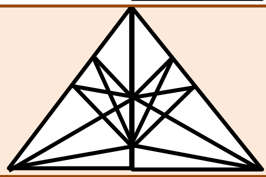
- يمكننا الحصول على الصيغة النونية لمجموع عدد المثلثات المرسومة في الشكل من خلال العلاقة التالية:

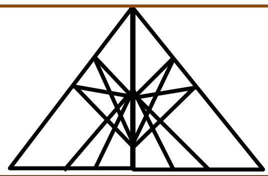
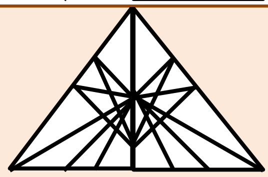
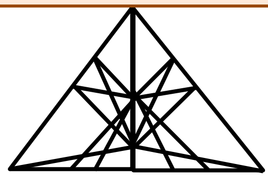
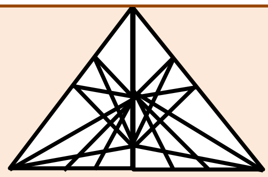
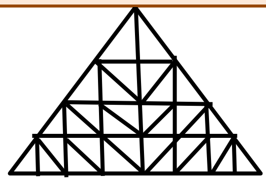
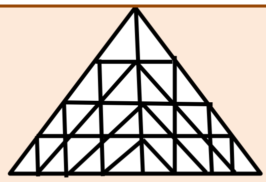
(الصيغة النونية لمجموع عدد المثلثات المشتركة بين جزئي الشكل) + (الصيغة النونية للمسألة الشكلية) × 2

- جميع الأشكال المتناظرة لها مثلث مشترك واحد.
- يكتفي الباحث بحصر المسائل الشكلية التي لها مثلثات مشتركة (أكثر من الواحد) بين جزئي أشكالها كما في جدول(5).

جدول(5): يوضح رقم المسألة الشكلية غير المتناظرة و شكل المسألة المتناظرة و الصيغة النونية لمجموع عدد المثلثات المشتركة

م	رقم المسألة الشكلية غير المتناظرة	شكل المسألة المتناظرة	الصيغة النونية لمجموع عدد المثلثات المشتركة
62	3		$2n+1$
63	4		$2n+1$
64	7		$3n+1$
65	14		$n+1$
66	15		$2n+1$
67	16		$\frac{n+1}{6}(n(2n+1)6)$
68	18		$\frac{n+1}{6}(n(2n+1)+6)$
69	22		2

2		23	70
n^2+1		24	71
$(n+1)^2+1$		25	72
2		27	73
3		28	74
2		29	75
5		30	76
6		31	77
2		33	78
2		34	79
3		35	80

81	36		n^2+1
82	37		$(n+1)^2+1$
83	38		n^2+2
84	39		$(n+1)^2+2$
85	41		$\frac{n^2+6n+5}{4}, n =$ عدد فردي $\frac{n^2+6n+4}{4}, n =$ عدد زوجي
86	42		$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

التوصيات:

في ضوء نتائج البحث التي تم التوصل إليها يوصي الباحث بما يلي:

- اهتمام القائمين على إعداد مناهج الرياضيات وتطويرها بالاهتمام بالمسألة الرياضية الشكلية.
- إضافة مساق حل المسألة لبرنامج البكالوريوس في الجامعات اليمنية.
- زيادة تركيز اهتمام المعلمين في كليات التربية بالمسألة الرياضية الشكلية ومهارات حلها دون التركيز فقط على ناتج الحل.
- اهتمام القائمين على الدورات التدريبية للمعلمين بوزارة التربية والتعليم بعقد دورات تدريبية لتأهيل المعلمين على كيفية التعامل مع المسألة الرياضية الشكلية واستراتيجيات حلها.

مقترحات الدراسة:

يقترح الباحث إجراء البحوث التالية:

- بحث آخر يتناول حل مسائل رياضية شكلية متنوعة باستخدام الاستقراء الرياضي.
- بحث آخر يتناول حل مسائل رياضية شكلية باستخدام طرق مختلفة.

المراجع:

[1] أبو زينة، فريد(2011). مناهج الرياضيات المدرسية و تدريسـها. ط2. دار الحنـين للنشر والتوزيع.

[2] أبوزينة, فريد كمال (2010). تطوير مناهج الرياضيات المدرسية و تعليمها. ط 1. دار وائل للنشر. عمان.

[3] بدوي, رمضان مسعد (2003). استراتيجيات في تعليم و تقويم تعلم الرياضيات. ط 1, دار الفكر. الأردن.

[4] الثبيتي, فهد(2011). تحديد صعوبات حل المشكلات الرياضية لدى تلاميذ الصف الرابع اللفظي من وجهة نظر معلمي ومشرفي الرياضيات بالمرحلة الابتدائية بالطائف. رسالة ماجستير غير منشورة. جامعة أم القرى. مكة المكرمة. السعودية.

[5] سلامة, عبدالحافظ (2003). تعليم العلوم و الرياضيات. ط 1. دار اليازوري. عمان.

[6] الصادق, إسماعيل محمد(2001). طرق تدريس الرياضيات نظريات و تطبيقات. ط 1. دار الفكر العربي. القاهرة. مصر.

[7] عبدالهادي, نبيل و آخرون(2002). أساسيات العلوم و الرياضيات و أساليب تدريسها. ط1. دار الصفاء للنشر. عمان.

[8] عبيد، وليم(2004). تعميم الرياضيات لجميع الأطفال في ضوء متطلبات المعايير وثقافة التفكير. ط 1. دار المسيرة. عمان.

[9] عفانة, عزو إسماعيل (1996). التكوين العاملي لصعوبات التفكير في حل المسألة الرياضية لدى طلبة الصفين الثاني و الثالث الثانوي بغزة. مجلة التقويم و القياس النفسي و التربوي. جامعة الأزهر بغزة .العدد (8).

[10] فرج الله, عبدالكريم موسى(2014). أساليب تدريس الرياضيات. ط 1. دار اليازوري. عمان. الأردن.

[11] كرانتس, ستيفن جي(2014). أساليب حل المسائل. ط 1. ترجمة معروف سمحان و فوزي الذكير. مكتب التربية العربي لدول الخليج. الرياض.

المراجع الأجنبية:

[12] Agostino, A. (2008). The development of mathematical reasoning: Role of Mcapacity, inhibition, updating, and shifting, DAI-B 70/01.

[13] Bernadette, E. (2010)." Third grade students' challenges and strategies to solving mathematical word problems. M.A. dissertation", The University of Texas at El Paso, United States, Texas.

RESEARCH ARTICLE

CONSTRUCTING FORMAL MATHEMATICAL PROBLEMS WITH A NTH FORM USING INDUCTION (HOW MANY TRIANGLES IN TRIANGLE?)

Salem Ahmed Abdallah AbdelKabeer*

Dept. of Mathematical, Faculty of Education - Aden, University of Aden, Yemen

***Corresponding author: Salem Ahmed Abdallah AbdelKabeer; E-mail: salemabdalkabeer16@gmail.com; Tel: 777084989**

Received: 30 February 2023 / Accepted 19 March 2023 / Published online: 31 March 2023

Abstract

The aim of the research is to build formal mathematical problems in its original form, where the verbal instructions begin with the question: How many triangles are drawn in the figure? Where this figure is the triangle for all issues, the researcher used the inductive method to find the general relations to solve the research questions, and he used mathematical induction to prove the validity of the results. The researcher reached the following results:

1- Constructing (7) formal mathematical problems whose sum of triangles is given in a first-order noun form.
2- Constructing (8) formal mathematical problems whose sum of triangles is given in a naught form of the second degree.
3- Constructing (25) formal mathematical problems whose sum of triangles is given in a third-degree noun form.
4- Construct (3) formal mathematical problems whose sum of triangles is given in a third-order noun form (odd and even).
5- Building (18) formal mathematical problems whose sum of triangles is given in a naughty form with two variables.
6- Constructing (25) symmetrical formal mathematical problems, the sum of which triangles are given in a nth form.

Keywords: Mathematical problems, N formula, How many triangles?

كيفية الاقتباس من هذا البحث:

عبد الكبير، س. أ. ع.، (2023). بناء مسائل رياضية شكلية ذات صورة نونية باستخدام الاستقراء (كم عدد المثلثات في المثلث؟). مجلّة جامعة عدن الإلكترونيّة للعلوم الانسانيّة والاجتماعية، 4(1)، ص149-183. https://doi.org/10.47372/ejua-hs.2023.1.241